

К вопросу изучения понятий «среднее арифметическое» и «медиана» в школьном курсе математики.

Ахматгалеева Н.О.

Пермякова О.В.

«Статистика знает все» утверждали Ильф и Петров в романе «Двенадцать стульев». Столбики цифр заключают сведения о населении в разных областях и странах, о собранном урожае, построенных домах, произведенной энергии, спущенных на воду кораблях и т.д. Чтобы анализировать данные и делать выводы, надо представлять их в удобном для анализа виде: таблицы и диаграммы.

Таблицы дают числовую информацию, причем очень подробную и иногда труднообозримую.

Диаграммы наглядны, но обрабатывать их числовыми методами неудобно. Поэтому полезно иметь такую информацию, которая кратко описывает числовые наборы и позволяет передать основные свойства данных. А эту информацию дают нам числовые показатели, которые могут многое рассказать о наборах, по которым они посчитаны. Такими показателями является среднее арифметическое и медиана числового набора.

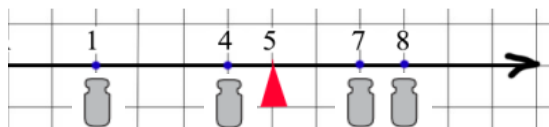
Средним арифметическим набора чисел называют отношение суммы всех этих чисел к их количеству.

$$\text{Среднее арифметическое} = \frac{\text{сумма всех значений}}{\text{количество значений}}$$

Рассмотрим числовой набор из 4 чисел: 1, 4, 7, 8. Найдем среднее арифметическое этого набора.

$$\frac{1+4+7+8}{4} = 5.$$

Каждому числу из числового набора можно сопоставить точку на прямой. Если во всех точках разместить одинаковые массы, то числовую прямую можно уравновесить, поместив опору в точку, координата которой равна среднему арифметическому чисел набора.

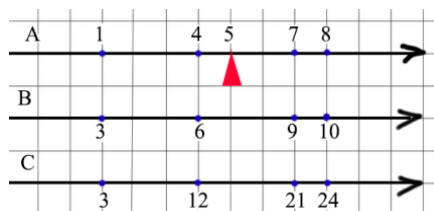


Такой физический смысл среднего арифметического позволяет наглядно продемонстрировать его свойства:

1. Среднее арифметическое нескольких чисел не может быть меньше наименьшего из чисел и больше наибольшего из чисел.

Для наглядного представления следующих свойств рассмотрим три числовых набора:

$A = \{1; 4; 7; 8\}$, $B = \{3; 6; 9; 10\}$, $C = \{3; 12; 21; 24\}$. Отметим числа на числовой прямой. Красным треугольником отмечено среднее арифметическое набора A , обозначим его \bar{a} .



Числа набора B получаются из чисел набора A увеличением на 2, а числа в наборе C получаются из чисел набора A умножением на 3.

Исходя из того, что среднее арифметическое служит центром тяжести, если вместо элементов набора поместить на числовую прямую одинаковые массы, можно сделать вывод, что средние арифметические наборов B и C располагаются так же, как в наборе A . Это значит, что

$$\bar{b} = \bar{a} + 2 = 7, \quad \bar{c} = 3 \cdot \bar{a} = 15.$$

2. Если каждое число набора увеличить (уменьшить) на одно и то же число a , то среднее арифметическое набора увеличится (уменьшится) на это же число a .

3. Если каждое число набора умножить на одно и то же число b , то среднее арифметическое набора также умножится на число b .

Рассмотрим таблицу, в которой отображена численность населения крупных городов Кировской области на 2022год

Город	Население, тыс.чел.
Киров	548
Кирово-Чепецк	67
Слободской	32
Вятские Поляны	31
Котельнич	22
Яранск	21

Найдем среднее арифметическое данного набора

$$\frac{548+67+32+31+22+21}{6} \approx 120.$$

Заметим, что среднее арифметическое не дает нам верного представления о численности населения городов Кировской области. Все значения в таблице, кроме населения областного центра, намного меньше 120 тыс.чел.

Исправить такое положение можно, «удалив» из таблицы значение, которое сильно отличается от остальных.

Тогда среднее арифметическое оставшегося набора будет равно $\frac{67+32+31+22+21}{5} = 34,6$ тыс.чел.

Такое значение вполне удовлетворительно описывает большинство крупных городов Кировской области.

Можно сделать вывод, что среднее арифметическое не всегда является «типичным представителем» ряда чисел. Поэтому кроме среднего арифметического используются другие меры «центра» числового набора. Одной из таких мер является медиана.

Медианой набора чисел называется такое число m , что хотя бы половина набора чисел не больше числа m и хотя бы половина чисел набора не меньше числа m .

Чтобы найти медиану ряда, нужно расположить все элементы в порядке возрастания (неубывания). Если в наборе нечётное количество чисел, то деление пройдёт в точности по центральному числу ряда. Это число и будет медианой. Если в наборе чётное количество чисел, то деление пройдёт между двумя центральными числами. В качестве медианы можно взять любое из них или любое число между ними. Часто медианой считают среднее арифметическое двух центральных чисел.

Найдем медиану населения крупных городов Кировской области. В таблице 6 чисел, расположенных по убыванию, поэтому медианой будет среднее арифметическое двух центральных чисел.

$$med = \frac{32+31}{2} = 31,5.$$

Медиана почти в четыре раза меньше среднего арифметического этого набора, и она достаточно хорошо описывает население типичного города Кировской области, даже несмотря на то, что из набора не удалили самый крупный город.

Приведем набор упражнений, которые не требуют больших вычислений, а направлены на осознание понятий среднего арифметического и медианы набора чисел.

Упражнения

1. Среднее арифметическое оценок Миши по математике за первую четверть равно 5. Что это значит?

2. У Жени в журнале по математике за четверть стоят несколько троек и гораздо больше четверок. Может ли его средний балл по математике быть 4,3?

3. Учитель построил диаграмму распределения оценок, полученных учениками класса за контрольную работу.



Оцените среднее арифметическое оценок в классе.

4. Вася, Катя и Егор находили среднее арифметическое набора чисел $-172,8$; 0 ; $14,1$; $-81,5$; $-3,7$ и получили разные ответы.

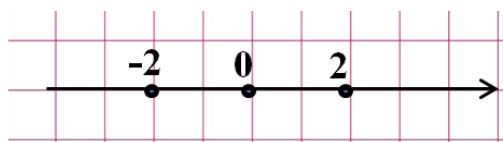
Вася: $-48,78$, Катя: $-180,26$, Егор: $18,85$.

Не выполняя вычислений укажите правильный ответ.

5. Вася, Катя и Егор находили медиану набора чисел $-172,8$; 0 ; $14,1$; $-81,5$; $-3,7$ и получили разные ответы.

Вася: $-182,8$, Катя: $-3,7$, Егор: $14,3$. Среди ответов только один правильный. Какой?

6. На числовой оси отмечены три числа.



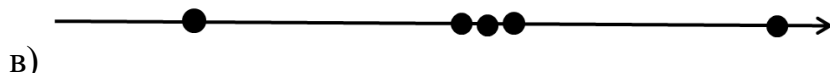
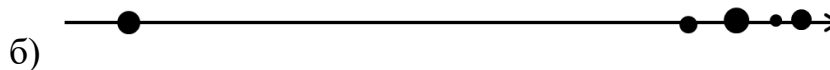
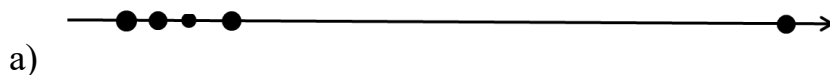
1) Отметьте ещё одно число, чтобы получился набор четырёх чисел, среднее арифметическое которого:

- а) положительно; б) отрицательно;
- в) расположено между вторым и третьим по величине числами в наборе;
- г) больше трёх чисел из набора.

2) Отметьте ещё два числа, чтобы получился набор пяти чисел, медиана которого:

- а) положительна; б) отрицательна; в) равна 0.

7. Числа набора отмечены на числовой прямой. Сравните медиану и среднее арифметическое этого числового набора.



8. Придумайте числовой набор из трёх чисел, в котором а) медиана равна нулю, а среднее арифметическое положительно; б) медиана равна нулю, а среднее арифметическое отрицательно; в) медиана и среднее арифметическое равны 0.