**Карточка 6 «Задачи на 1 кучу камней»**

**Задача 1.**  Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 12 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 50. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 50 или больше камней. В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 49. Ответьте на следующие вопросы:

**Вопрос 1.** Найдите минимальное значение S, при котором Ваня выигрывает своим первым ходом при любой игре Пети.

**Вопрос 2.** Сколько существует значений S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

− Петя не может выиграть за один ход;

− Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

**Вопрос 3.** Найдите два значения S, при которых одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом. Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задача 2.** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу **один или четыре камня** или увеличить количество камней в куче в **пять раз**. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 68. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в куче будет 68 или больше камней. В начальный момент в куче было S камней; 1 ≤ S ≤ 67. Ответьте на следующие вопросы:

**19.** Известно, что Ваня выиграл первым своим ходом после неудачного хода Пети. Укажите минимальное значение S, когда эта ситуация возможна.

**20.** Найдите два таких значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

− Петя не может выиграть за один ход;

− Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**21.** Найдите минимальное значение S, при котором одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

**Задача 3.** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень, добавить три камня или увеличить количество камней в куче в три раза. При этом **нельзя повторять ход**, который только что сделал второй игрок. Например, если в начале игры в куче 4 камня, Петя может первым ходом получить кучу из 5, 7 или 12 камней. Если Петя добавил 1 камень и получил кучу из 5 камней, то следующим ходом Ваня может либо добавить 3 камня (и получить 8 камней), либо утроить количество камней в куче (их станет 15). Получить 6 камней Ваня не может, так как для этого нужно добавить 1 камень, а такой ход только что сделал Петя.

Чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается, когда количество камней в куче становится не менее 100. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 100 или больше камней. В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 99.

Ответьте на следующие вопросы:

**Вопрос 1.** Укажите такое значение S, при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

**Вопрос 2.** Определите минимальное и максимальное значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

− Петя не может выиграть за один ход;

− Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Вопрос 3.** Найдите значение S, при котором одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

﻿**Задача 4.** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может увеличить количество камней в куче **в три раза**, добавить в кучу **один камень**, **или 3 камня**, при этом после каждого хода в куче должно быть **нечетное количество камней**. Например, пусть в куче было 8 камней. Тогда за один ход можно получить кучу из 9 камней или из 11 камней (увеличить количество камней в три раза нельзя, т.к. после этого хода получится четное количество камней – 24). Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Выигрывает тот игрок, после хода которого количество камней в куче становится не менее 51.

В начальный момент в куче было S камней; 1 ≤ S ≤ 50. Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

Ответьте на следующие вопросы:

**Вопрос 1.** Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после первого хода Пети. Назовите минимальное значение S, при котором это возможно.

**Вопрос 2.** Найдите два наибольших значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём Петя не может выиграть первым ходом, но может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Вопрос 3.** Сколько существует значений S, при которых у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть вторым ходом при любой игре Пети.

**Задача 5.** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит одна куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

  а) убрать из кучи половину камней, если количество камней в куче делится на 2; иначе убрать из кучи два камня;

  б) убрать из кучи две трети камней, если количество камней в куче делится на 3; иначе убрать из кучи три камня.

Например, пусть в куче 10 камней, тогда можно убрать половину или только три камня. А если в куче 12 камней, то можно убрать половину или две трети камней. Игра завершается в тот момент, когда в куче останется ровно 1 камень. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу, в которой будет ровно 1 камень. В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 37.

Ответьте на следующие вопросы:

**Вопрос 1.** Найдите максимальное значение S, при котором Ваня может выиграть своим первым ходом после неудачного хода Пети, который мог выиграть своим первым ходом.

**Вопрос 2.** Определите минимальное и максимальное значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

− Петя не может выиграть за один ход;

− Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Вопрос 3.** Найдите минимальное значение S, при котором одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

**Задача 6\*.** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

  а) добавить в кучу один камень;

  б) увеличить количество камней в куче в два раза.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 20. Если при этом в куче оказалось не более 30 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 19.

Ответьте на следующие вопросы:

**Вопрос 1.** Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после первого хода Пети. Назовите мини-мальное значение S, при котором это возможно.

**Вопрос 2.** Определите два таких значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

− Петя не может выиграть за один ход;

− Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Вопрос 3.** Найдите значение S, при которых одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

**Задача 7\*.**  Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

  а) добавить в кучу один камень;

  б) увеличить количество камней в куче в два раза;

  в) увеличить количество камней в куче в три раза.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 36. Если при этом в куче оказалось не более 60 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 35. Ответьте на следующие вопросы:

**Вопрос 1.** Найдите минимальное значение S, при котором Ваня выигрывает своим первым ходом при любой игре Пети.

**Вопрос 2.** Сколько существует значений S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

− Петя не может выиграть за один ход;

− Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

**Вопрос 3.** Найдите минимальное и максимальное значения S, при которых одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом. Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задача 8 \*.**

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) добавить в кучу сто камней или

б) увеличить количество камней в куче в два раза.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 110 или 20 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 1000. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 1000 или больше камней. В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 999. Ответьте на следующие вопросы:

**Вопрос 1.** Сколько существует значений S, при которых Ваня выигрывает первым ходом?

**Вопрос 2.** Сколько существует значений S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?

**Вопрос 3.** Назовите минимальное и максимальное значения S, при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом, при этом для любого значения у Вани есть возможность выиграть своим первым ходом (в случае ошибки Пети). Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.