1. Изучить основные теоремы о дифференцируемых функциях и примеры их применения.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

1. Локальный экстремум и теорема Ферма

Понятие экстремума было введено в § 3 гл. III. Напомним это определение.

Пусть функция $f(x)$ определена в δ-окрестности точки x_0, т. е. на множестве $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, и пусть для всех $x \in U_\delta(x_0)$, $x \neq x_0$, т. е. для всех $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$, выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0). \tag{1}$$

Тогда говорят, что функция имеет в точке x_0 локальный максимум.

Аналогично, если для всех $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство

$$f(x) > f(x_0), \tag{2}$$

то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный минимум.

Локальный максимум и локальный минимум объединяются общим термином «локальный экстремум», причем слово «локальный» часто опускают.

Функция $f(x)$, график которой изображен на рис. 1, имеет экстремумы в точках $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, а именно, минимумы при $x = 1$ и $x = 4$ и максимум при $x = 3$.

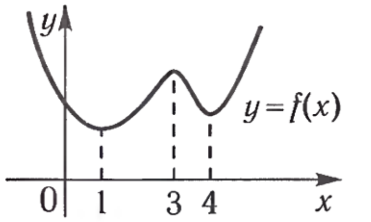

Рис. 1

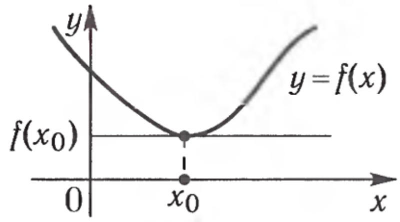

Рис. 2

Теорема 1 (*Ферма*). *Если функция $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0 и дифференцируема в этой точке, то*

$$f'(x_0) = 0. \tag{3}$$

○ Пусть, например, функция $f(x)$ имеет минимум в точке x_0. Тогда для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, т. е. на множестве $\dot{U}_\delta(x_0)$, выполняется неравенство

$$f(x) > f(x_0). \tag{4}$$

Если $x \in (x_0 - \delta; x_0)$, то $x - x_0 < 0$ и из условия (4) следует, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0, \tag{5}$$

а если $x \in (x_0; x_0 + \delta)$, то выполняется неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0. \tag{6}$$

Так как функция f дифференцируема в точке x_0, то существует предел при $x \to x_0 - 0$ в левой части неравенства (5), равный $f'_-(x_0) = f'(x_0)$. По свойствам пределов из неравенства (5) следует, что

$$f'(x_0) \leqslant 0. \tag{7}$$

Аналогично, переходя к пределу при $x \to x_0 + 0$ в неравенстве (6), получаем

$$f'(x_0) \geqslant 0. \tag{8}$$

Из неравенств (7) и (8) следует, что $f'(x_0) = 0$. ●

Замечание. Теорема Ферма имеет простой геометрический смысл: если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет экстремум, то касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ параллельна оси абсцисс (рис. 2).

2. Теорема Ролля о нулях производной

Теорема 2 ***(Ролля).*** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, принимает в концах этого отрезка равные значения, т. е.*

$$f(a) = f(b), \tag{9}$$

и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда существует точка $c \in (a; b)$ такая, что

$$f'(c) = 0. \tag{10}$$

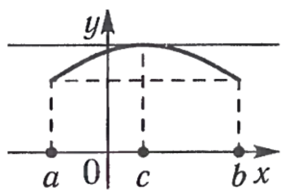

Рис. 3

○ Обозначим

$$M = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x), \quad m = \inf_{a \leqslant x \leqslant b} f(x).$$

По теореме Вейерштрасса (гл. IX, § 4, теорема 1) на отрезке $[a; b]$ существуют такие точки c_1 и c_2, что $f(c_1) = m$, $f(c_2) = M$.

Если $m = M$, то $f(x) = \text{const}$, и в качестве c можно взять любую точку интервала $(a; b)$.

Если $m \neq M$, то $m < M$, и поэтому $f(c_1) < f(c_2)$. В силу условия (9) по крайней мере одна из точек c_1, c_2 является внутренней точкой отрезка $[a; b]$. Пусть, например, $c_1 \in (a; b)$. Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что $U_\delta(c_1) \subset (a; b)$. Так как для всех $x \in U_\delta(c_1)$ выполняется условие $f(x) \geqslant f(c_1) = m$, то по теореме Ферма $f'(c_1) = 0$, т. е. условие (10) выполняется при $c = c_1$. Аналогично рассматривается случай, когда $c_2 \in (a; b)$. ●

Теорему Ролля можно кратко сформулировать так:

Между двумя точками, в которых дифференцируемая функция принимает равные значения, найдется хотя бы один нуль производной этой функции. Для случая $f(a) = f(b) = 0$ теорема формулируется еще короче: между двумя нулями дифференцируемой функции лежит хотя бы один нуль ее производной.

Например, если $f(x) = 2 + 2x - x^2$, то $f(-1) = f(3) = -1$, и на интервале $(-1; 3)$ существует точка $x_0 = 1$ такая, что $f'(x_0) = 0$.

Замечание. Геометрический смысл теоремы Ролля: при условиях теоремы 2 существует значение $c \in (a; b)$ такое, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(c; f(c))$ параллельна оси Ox (рис. 3).

3. Формула конечных приращений Лагранжа

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, то в этом интервале найдется хотя бы одна точка c такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{11}$$

○ Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x) + tx,$$

где число t выберем таким, чтобы выполнялось условие $\varphi(a) = \varphi(b)$, т. е. $f(a) + ta = f(b) + tb$.

Отсюда находим

$$t = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{12}$$

Так как функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и принимает равные значения в концах этого интервала, то по теореме Ролля существует точка $c \in (a; b)$ такая, что $\varphi'(c) = f'(c) + t = 0$. Отсюда в силу условия (12) получаем равенство

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \tag{13}$$

равносильное равенству (11). ●

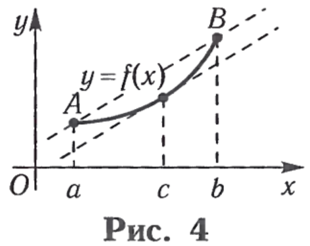

Рис. 4

Замечание 1. Точку c, о которой идет речь в теореме 3, можно представить в виде $c = a + tb$, где $0 < t < 1$.

Замечание 2. Правая часть формулы (13) равна угловому коэффициенту секущей, которая проходит через точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$ графика функции $y = f(x)$. Левая часть этой формулы равна угловому коэффициенту касательной к графику в точке $(c; f(c))$.

Поэтому теорема Лагранжа имеет следующую геометрическую интерпретацию: существует значение $c \in (a;b)$ такое, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(c; f(c))$ параллельна секущей (рис. 4), соединяющей точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$.

2) По теореме Лагранжа для функции $f(t) = \operatorname{arctg} t$ на отрезке с концами x_1 и x_2 имеем

$$\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1 = \frac{x_2 - x_1}{1 + c^2},$$

откуда получаем

$$|\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1| = \frac{|x_2 - x_1|}{1 + c^2} \leqslant |x_2 - x_1|,$$

так как

$$0 < \frac{1}{1 + c^2} \leqslant 1. \qquad \blacktriangle$$

Полагая в соотношении (15) $x_2 = x$, $x_1 = 0$, получаем

$$|\operatorname{arctg} x| \leqslant |x|, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

и в частности

$$0 \leqslant \operatorname{arctg} x \leqslant x, \quad x \geqslant 0. \tag{17}$$

4. Некоторые следствия из теоремы Лагранжа

Следствие 1. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a;b)$, то*

$$f(c) = C = \text{const}, \quad x \in (a;b).$$

○ Пусть x_0 — фиксированная точка интервала $(a;b)$, x — любая точка этого интервала. Применяя теорему Лагранжа к функции $f(t)$ на отрезке с концами x_0 и x, получаем

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(c),$$

где $c \in (a;b)$, $f'(c) = 0$, откуда $f(x) = f(x_0) = C$. ●

Следствие 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и для всех $x \in (a;b)$ выполняется равенство $f'(x) = k$, где k — постоянная, то*

$$f(x) = kx + B, \quad x \in [a;b],$$

т. е. f — линейная функция.

○ Применяя теорему Лагранжа к функции f на отрезке $[a;x]$, где $a \leqslant x \leqslant b$, получаем $f(x) - f(a) = k(x-a)$, откуда следует, что $f(x) = kx + B$, где $B = f(a) - ka$. ●

Следствие 3. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$, за исключением, быть может, точки $x_0 \in (a;b)$. Тогда, если существует конечный или бесконечный*

$$\lim_{x \to x_0+0} f'(x) = A, \tag{18}$$

то в точке x_0 существует правая производная, причем

$$f'_+(x_0) = A. \tag{19}$$

Аналогично, если существует

$$\lim_{x \to x_0-0} f'(x) = B, \tag{20}$$

то

$$f'_-(x_0) = B. \tag{21}$$

○ Ограничимся доказательством равенства (19). Пусть $\Delta x > 0$ и точка $x_0 + \Delta x$ принадлежит интервалу $(a;b)$. По теореме 3

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + t\Delta x) \cdot \Delta x, \quad 0 < t < 1, \tag{22}$$

так как $x_0 < x_0 + t\Delta x < x_0 + \Delta x$ при $t \in (0;1)$. Запишем равенство (22) в виде

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + t\Delta x), \quad 0 < t < 1. \tag{23}$$

Если существует предел (18), то правая часть соотношения (23) имеет предел, равный A, так как

$$\lim_{x \to x_0+0} f'(x) = \lim_{\Delta x \to +0} f'(x_0 + \Delta x) = A.$$

Поэтому существует предел в левой части соотношения (23), который по определению равен $f'_+(x_0)$, и справедливо равенство (18). ●

Пример 2. Найти $f'_-(0)$ и $f'_+(0)$, если:

1) $f(x) = |x^2 - x|$;

△ 1) Функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и дифференцируема при всех $x \in \mathbb{R}$, кроме $x = 0$ и $x = 1$.

Если $x < 0$, то $f(x) = f_1(x) = x^2 - x$, $f_1'(x) = 2x - 1$, а если $0 < x < 1$, то $f(x) = f_2(x) = x - x^2$, $f_2'(x) = 1 - 2x$. Так как $f'_-(0) = \lim\limits_{x\to -0} f_1'(x) = -1$ (следствие 3), а $f'_+(0) = \lim\limits_{x\to +0} f_2'(x) = 1$, то $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$.

Пример 3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы при $x \geqslant x_0$ и удовлетворяют условиям $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x) > g'(x)$ при $x > x_0$. Тогда $f(x) > g(x)$ при $x > x_0$.

$\triangle$ Применим теорему Лагранжа к функции $h(t) = f(t) - g(t)$ на отрезке $[x_0; x]$, где $x > x_0$, и учитывая, что $h(x_0) = 0$, получим

$$h(x) = h'(c)(x - x_0), \quad \text{где} \quad c > x_0,$$

$$h'(c) = f'(c) - g'(c) > 0.$$

Следовательно, $h(x) > 0$, при $x > x_0$, т. е. $f(x) > g(x)$ при $x > x_0$. $\blacktriangle$

5. Формула Коши

Теорема 4. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, дифференцируемы на интервале $(a; b)$, причем $g'(x) \neq 0$ во всех точках этого интервала. Тогда найдется хотя бы одна точка $c \in (a; b)$ такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{25}$$

○ Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x) + t \cdot g(x),$$

где число t выберем таким, чтобы выполнялось равенство $\varphi(a) = \varphi(b)$, которое равносильно следующему:

$$f(b) - f(a) + t(g(b) - g(a)) = 0. \tag{26}$$

Заметим, что $g(b) \neq g(a)$, так как в противном случае согласно теореме Ролля существовала бы точка $\alpha \in (a; b)$ такая, что $g'(\alpha) = 0$ вопреки условиям теоремы 4. Итак, $g(b) - g(a) \neq 0$, и из равенства (26) следует, что

$$t = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{27}$$

Так как функция φ при любом t непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$, а при значении t, определяемом формулой (27), принимает равные значения в точках a и b, то по теореме Ролля существует точка $c \in (a; b)$ такая, что $\varphi'(c) = 0$, т. е. $f'(c) + t \cdot g'(c) = 0$, откуда

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = -t.$$

Из этого равенства и формулы (27) следует утверждение (25). ●

Замечание. Теорема Лагранжа — частный случай теоремы Коши ($g(x) = x$).

Пример 5. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, где $a > 0$. Доказать, что существует точка $c \in (a; b)$ такая, что

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(c) - cf'(c). \tag{28}$$

△ Применяя теорему 4 к функциям $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$ и $h(x) = \frac{1}{x}$, получаем

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{h(b) - h(a)} = \frac{\varphi'(c)}{h'(c)}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\dfrac{f(b)}{b} - \dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}} = \frac{\dfrac{cf'(c) - f(c)}{c^2}}{-\dfrac{1}{c^2}},$$

откуда следует равенство (28). ▲

2. Решить задания из гл.14 задачника № 1(1,3), 2(1,3,5),3,4(1),5,6(2,3).
3. Задание проверю 30.03.(после каникул).